Fizikas Komandu Olimpiāde

2021

Uzdevumu risinājumi 10.–12. klasēm

Satelīts "Gauja" 28 punkti

Lai veicinātu Marsa kā potenciālas dzīvesvietas apguvi, Latvijas Nacionālais Centrs Kosmosa Izpētei (LNCKI) ir nolēmis nogādāt satelītu "Gauja" Marsa orbītā. Šajā uzdevumā Tu palīdzēsi Latvijas fiziķiem atbildēt uz jautājumiem, kuru atbildes ir nozīmīgas satelīta izstrādes un transporta procesam.

1. Šajā uzdevumā apskatīsim satelīta būvēšanas procesu. Lai varētu precīzi aprakstīt palaista satelīta kustību orbītā, svarīgi ir zināt satelīta masas centra atrašanās vietu. Lai iesildītos satelīta masas sadalījuma analīzei, aplūkosim vienkāršākus ķermeņus. Gan pats satelīts, gan visi pārējie šajā uzdevumā apskatītie ķermeņi ir plakani – tātad to blīvumu norādīsim nevis kā masu uz tilpuma vienību, bet gan kā masu uz laukuma vienību. Tas vienkāršos aprēķinus ķermeņiem, kuru biezumu apskatīt nav vērts.

A. Zemāk redzamā figūra ir taisnstūris ar vienmērīgu masas sadalījumu (konstantu blīvumu), kura kreisais apakšējais stūris atrodas koordinātu sistēmas sākumpunktā. Taisnstūra malu garumi ir 3 m un 4 m. Nosaki taisnstūra masas centra koordinātas (x, y)! *0.2 punkti*

Masas centrs sakrīt ar taisnstūra ģeometrisko centru – tātad tā x un y koordinātas sakrīt ar malu viduspunktu koordinātām $(2, 1.5)$.

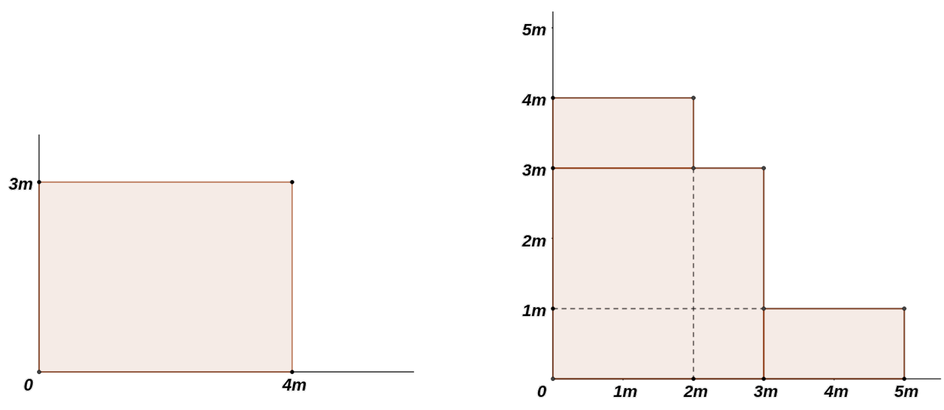
B. Satelīts noteikti nevar būt tik viengabalains! Aprēķini masas centra koordinātas (x, y) zemāk redzamajai figūrai (tā ir veidota no 3 taisnstūriem – visu blīvums ir vienāds)! *0.4 punkti*

Sākumā aprēķināsim katra taisnstūra masas centra koordinātas. Rīkojoties īdzīgi kā iepriekšējā punktā, iegūsim $(1.5, 1.5)$ kvadrātam, $(4, 0.5)$ un $(1, 3.5)$ taisnstūriem. Kombinēt vairākus masas punktus varam, aprēķinot svērto aritmētisko vidējo:

$$x_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i x_i}{\sum_i m_i} \tag{1}$$
$$y_{\text{cm}} = \frac{\sum_i m_i y_i}{\sum_i m_i} \tag{2}$$

Redzam, ka kvadrāta masa ir 4.5 reizes lielāka par katra taisnstūru masu, tātad

$$x_{\text{cm}} = \frac{4.5 \cdot 1.5 + 1 \cdot 4 + 1 \cdot 1}{4.5 + 1 + 1} = 1.80\,\text{m} \tag{3}$$
$$y_{\text{cm}} = \frac{4.5 \cdot 1.5 + 1 \cdot 0.5 + 1 \cdot 3.5}{4.5 + 1 + 1} = 1.65\,\text{m} \tag{4}$$



1. zīm.: A un B daļa

C. Satelīts diez vai būs veidots no taisnstūriem vien! Apskatīsim taisnleņķa trīsstūri ar katešu garumiem 3 m un 4 m. Nosaki masas centra atrašanās vietu (x, y)! *0.6 punkti*

No skolas ģeometrijas kursa zinām, ka trijstūra masas centrs ir tā mediānu krustpunktā (šo faktu var iegūt, arī sadalot trijstūri daudz bezgalīgi plānās daļās – katras daļas masas centrs ir tās viduspunkts, bet visi viduspunkti, tātad arī to vidējais, atrodas uz trīsstūra mediānas). Izmantojot teorēmu, ka mediānas krustpunktā tiek sadalītas attiecībā 2 : 1, varam saprast, ka masas centra koordinātas dalīs katru kateti attiecībā 2 : 1. Tātad

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{4}{3} = 1.33\,\mathrm{m} \tag{5}$$

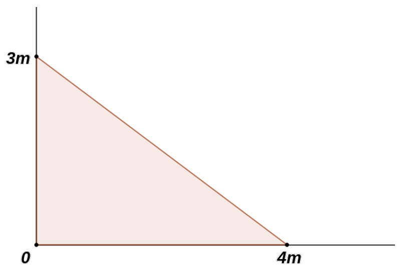
$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{3}{3} = 1\,\mathrm{m} \tag{6}$$

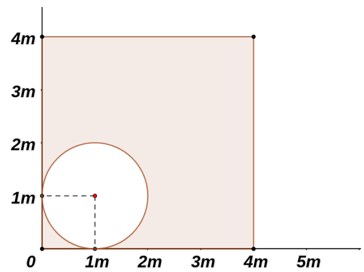
D. Satelītā varētu parādīties arī caurumi! Zemāk redzi taisnstūri, no kura izgriezts caurums riņķa līnijas formā. Kur atrodas masas centrs (x, y)? *0.8 punkti*

Galvenā atrisinājuma ideja – caurumu aizstāt ar papildus objektu, kura masa ir negatīva un kura blīvums pēc moduļa ir vienāds ar taisnstūra blīvumu. Izmantojot šādu metodi, atliek aprēķināt taisnstūra un riņķa masu attiecību, katra objekta masas centru un izmantot formulas 1 un 2. Taisnstūra masas centrs ir $(2, 2)$, bet riņķa – $(1, 1)$. Masu attiecība (pēc moduļa) sakrīt ar laukumu attiecību. Riņķa laukums ir $\pi \cdot 1^2 = \pi\,\mathrm{m}^2$, bet taisnstūra laukums ir $4 \cdot 4 = 16\,\mathrm{m}^2$. Ievietojot šos skaitļus vienādojumos 1 un 2, iegūstam

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{16 \cdot 2 + (-\pi) \cdot 1}{16 + (-\pi)} = 2.24\,\mathrm{m} \tag{7}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{16 \cdot 2 + (-\pi) \cdot 1}{16 + (-\pi)} = 2.24\,\mathrm{m} \tag{8}$$





2. zīm.: C un D daļa

E. Tagad esam gatavi aplūkot pašu satelītu. Satelīta izmēri ir norādīti milimetros, un dažādu satelīta daļu blīvumi atšķiras. Reģionu 1 un 2 blīvumi ir doti zem attēla, reģions 3 ir caurums. Reģions 1 ir rombs, kura garākā diagonāle atrodas uz reģiona 2 simetrijas ass. Nosaki satelīta masu m un tā masas centra koordinātas (x, y) ($\sigma_1 = 1000\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$ un $\sigma_2 = 2000\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$)! *1 punkts*

Šīs daļas risinājums neprasa jaunas idejas – satelīts sastāv no trim detaļām, vienai no kurām (riņķim) ir negatīva masa). Figūru laukumi ir:

$$S_1 = 0.5 \cdot (0.3 \cdot 0.4) = 0.06\,\mathrm{m}^2 \tag{9}$$

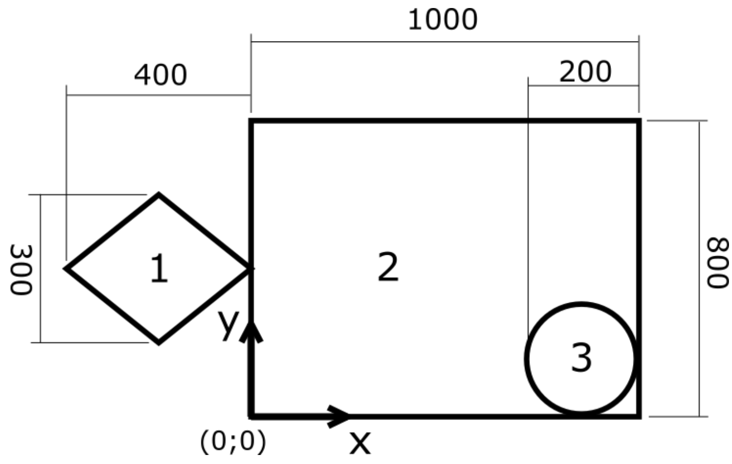
$$S_2 = 1 \cdot 0.8 = 0.8\,\mathrm{m}^2 \tag{10}$$

$$S_3 = \pi \cdot 0.1^2 = 0.0314\,\mathrm{m}^2 \tag{11}$$

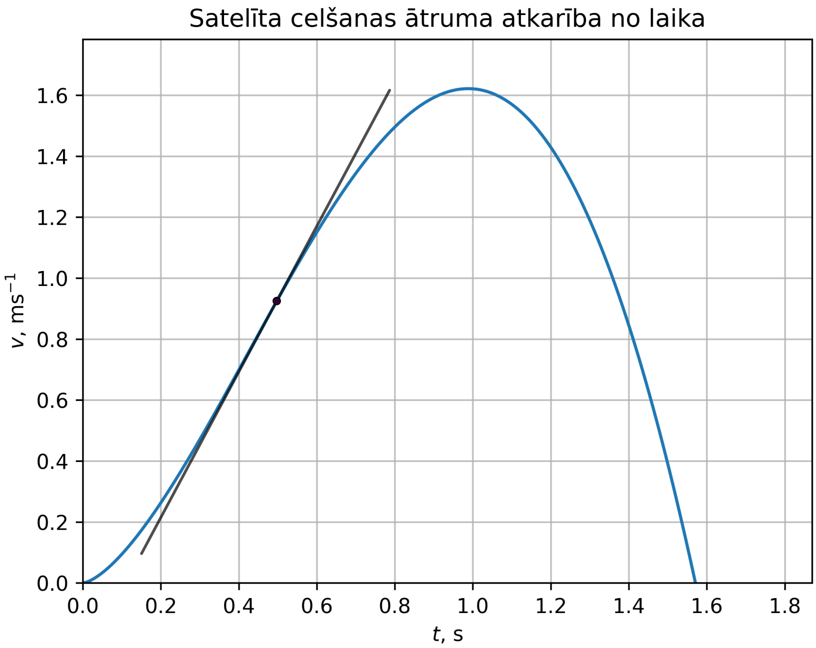
Tātad satelīta masa ir $m = \sigma_1 S_1 + \sigma_2 S_2 + \sigma_3 S_3 = (1000 \cdot 0.06) + (2000 \cdot 0.8) + ((-2000) \cdot 0.0314) = 1597\,\mathrm{kg}$ Šeit esam izmantojuši $\sigma_3 = -\sigma_2 = -2000\,\mathrm{kg\,m^{-2}}$. Reģiona 1 masas centrs ir $(-0.2, 0.15)$, reģiona 2 masas centrs ir $(0.5, 0.4)$ un reģiona 3 masas centrs ir $(0.9, 0.1)$. Tātad satelīta masas centra koordinātas ir:

$$x_{\mathrm{cm}} = \frac{0.06 \cdot 1000 \cdot (-0.2) + 0.8 \cdot 2000 \cdot 0.5 + 0.0314 \cdot (-2000) \cdot 0.9}{0.06 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 2000 + 0.0314 \cdot (-2000)} = 0.4580 \tag{12}$$

$$y_{\mathrm{cm}} = \frac{0.06 \cdot 1000 \cdot 0.15 + 0.8 \cdot 2000 \cdot 0.4 + 0.0314 \cdot (-2000) \cdot 0.1}{0.06 \cdot 1000 + 0.8 \cdot 2000 + 0.0314 \cdot (-2000)} = 0.4024 \tag{13}$$



3. zīm.: E daļa



4. zīm.: Satelīta celšana

2. Kad satelīts ir gatavs un tā masas centrs – zināms, to ir jānovieto uz raķetes. Šo procesu veic celamkrāns, kurš garā trosē iekārto satelītu ceļ vertikāli uz augšu. Celšanas ātrums nav konstants, bet gan mainās procesa laikā. Zemāk redzamais grafiks attēlo šīs pārmaiņas. Tavs uzdevums ir noteikt, cik izturīgai jābūt trosei, kas satelītu cels, tas ir, kādu spēku tai jāvar izturēt. *2 punkti*

Izmantojot augstāk redzamo grafiku, gravitācijas paātrinājuma vērtību $g = 9.8\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ un iepriekš aprēķināto satelīta masu, nosaki, kāds ir maksimālais sastiepuma spēks trosē celšanas laikā! (Ja iepriekšējā punktā neieguvi masas vērtību, izmanto šo masas vērtību (tā nesakrīt ar iepriekš iegūto): $m = 1000\,\mathrm{kg}$).

Uz satelītu darbojas 2 spēki – smaguma spēks un troses sastiepuma spēks.

$$ma = F_s - mg \tag{14}$$

jeb

$$F_s = m(a + g) \tag{15}$$

Gan m, gan g ir nemainīgi, tātad F_s sasniedz maksimumu, kad a sasniedz maksimumu. To varam noteikt no dotā grafika – paātrinājums a ir ātruma v atvasinājums – grafiski to var noteikt kā pieskares slīpumu v līknei. Atliek izvēlēties punktu, kurā v līkne ir visstāvākā, tajā novilkt pieskari un noteikt tās slīpuma koeficientu.

3. Satelīts nu ir droši novietots uz raķetes. Turpinot satelīta dzīves ceļa aprakstu, risināsim jautājumus par nesējraķetes kustību.

A. Aplūkosim raķetes kustību 3 km garā taisnvirziena posmā. Pirmo kilometru tā veic ar ātrumu $1\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, otro ar ātrumu $2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, bet trešo – ar ātrumu $3\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Nosaki raķetes vidējo ātrumu v_{vid}! *1.5 punkti*

Vidējais ātrums ir definēts kā kopējais ceļš pret kopējo laiku $v_{\text{vid}} = \frac{s}{t}$. Kopējo ceļu zinām, atliek uzzināt kopējo laiku.

$$t_{\text{kop}} = t_1 + t_2 + t_3 = \frac{s_1}{v_1} + \frac{s_2}{v_2} + \frac{s_3}{v_3} \tag{16}$$

$$t_{\text{kop}} = \frac{1000}{1} + \frac{1000}{2} + \frac{1000}{3} = 1833\,\mathrm{s} \tag{17}$$

Tātad $v_{\text{vid}} = \frac{3000}{1833} = 1.64\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

B. Pretstatā tikko aprakstītajai situācijai, raķetes pacelšanās laikā tās kustība nav vienmērīga. Kādam nosacījumam ir jāizpildās, lai raķetes kustība būtu vienmērīga? *0.5 punkti*

- Uz raķeti darbojošos spēku summai jābūt konstantai.
- Uz raķeti darbojošos spēku summai jāmainās vienmērīgi.
- Uz raķeti darbojošos spēku summai jābūt 0.
- Uz raķeti darbojošos spēku summai jābūt vienādai ar raķetes masu.

Ņūtona pirmais likums – spēku summai jābūt 0.

4. Raķete paātrinās uz augšu, izgrūžot degvielas izmešus lejup. Raķete katru sekundi izgrūž 500 kg izmešu ar ātrumu $400\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Raķetes sākotnējā masa ir 100 t. Ja tās sākotnējais ātrums ir $10\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, tad kāds būs tās ātrums pēc 4 sekundēm? Un pēc 10 sekundēm? Uzskati, ka raķete atrodas tālu no Zemes – gravitācijas lauku un gaisa pretestību neņem vērā. *3 punkti*

Šeit noderīgs ir Cialkovska vienādojums (*Tsiolkovsky rocket equation*) – tā izvedums nav sarežģīts, bet risinājuma kompaktuma dēļ aicinām to apskatīt, piemēram, vietnē *Wikipedia*.

$$\Delta v = v_{\text{izmeši}} \ln \frac{m_0}{m_{\text{beigu}}} \tag{18}$$

Pēc 4 sekundēm raķete būs izgrūdusi $500 \cdot 4 = 2000\,\mathrm{kg}$ izmešu, pēc 10 sekundēm $500 \cdot 10 = 5000\,\mathrm{kg}$. Tātad m_{beigu} šajos laikos ir attiecīgi $100000 - 2000 = 98000\,\mathrm{kg}$ un $100000 - 5000 = 95000\,\mathrm{kg}$. Izmantojot Cialkovska vienādojumu, iegūstam

$$\Delta v(4) = 400 \cdot \ln \frac{100000}{98000} = 8.08\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{19}$$

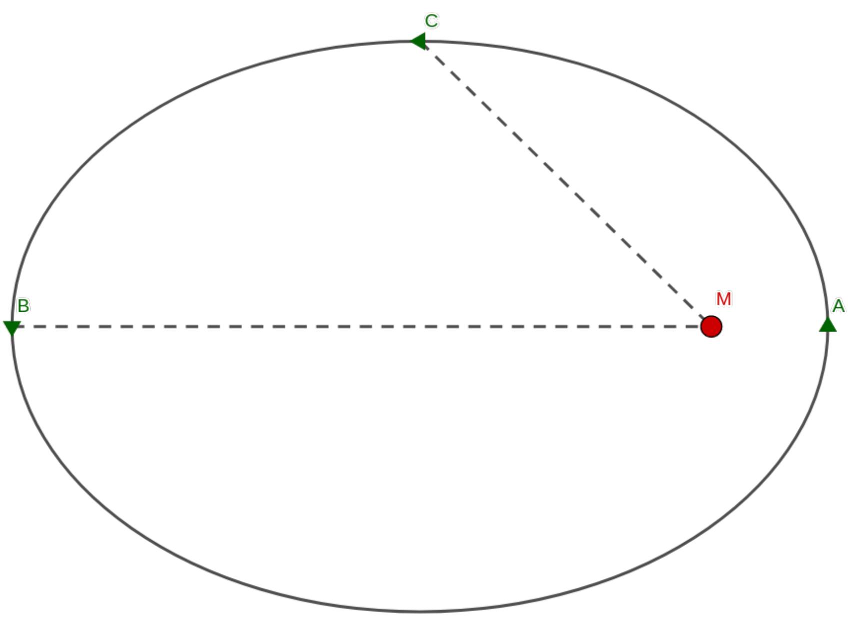
$$\Delta v(10) = 400 \cdot \ln \frac{100000}{95000} = 20.52\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{20}$$

Raķetes beigu ātrums tad ir

$$v(4) = 10 + 8.08 = 18.08\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{21}$$

$$v(10) = 10 + 20.52 = 30.52\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{22}$$

5. Raķete ir nogādājusi satelītu tā jaunajās mājās – stabilā, eliptiskā orbītā ap Marsu. Analizēsim tā kustību:



A. Kurā no trim orbītas punktiem (A, B vai C) satelīta ātrums ir vislielākais? *0.5 punkti*

Satelīta kinētiskās un potenciālās enerģijas summa ir konstanta. Ātrums ir vislielākais tad, kad kinētiskā enerģija ir vislielākā – tātad, kad potenciālā enerģija ir vismazākā.

$$U = -G\frac{mM}{r} \tag{23}$$

Ievērojot to, ka $U < 0$ varam secināt, ka tā ir vismazākā, kad r ir vismazākais. Tātad atbilde ir punkts A.

B. Kurā no punktiem satelīta potenciālās enerģijas absolūtā vērtība ir vismazākā? *0.5 punkti*

$$|U| = \left|-G\frac{mM}{r}\right| = G\frac{mM}{r} \tag{24}$$

Tātad potenciālās enerģijas absolūtā vērtība sasniedz minimumu, kad r ir maksimāls – punktā B.

C. Kurā no punktiem satelīts izjūt vislielāko paātrinājumu? *0.5 punkti*

Pēc Ņūtona otrā likuma

$$\vec{F} = m\vec{a} \tag{25}$$

Tātad paātrinājuma absolūtā vērtība ir vislielākā tad, kad maksimumu sasniedz $|\vec{F}|$.

$$F = G\frac{mM}{r^2} \tag{26}$$

F sasniedz maksimumu, kad r ir minimāls – atbilde ir punkts A.

D. Kurā no punktiem satelīta ātruma modulis mainās visstraujāk? *0.5 punkti*

Šis jautājums parāda svarīgu matemātisku faktu – ātruma atvasinājuma modulis nav vienāds ar ātruma moduļa atvasinājumu. Gan punktā A, gan B paātrinājums ir perpendikulārs ātrumam, tātad tas var ietekmēt tikai ātruma vektora virzienu, bet ne magnitūdu. Punktā C paātrunājumam ir arī paralēla komponente ātrumam – atbilde ir punkts C.

6. Satelīts šobrīd atrodas punktā B, kura attālums līdz Marsam ir 5000 km. Marsa masa ir $M = 6.417 \cdot 10^{23}$ kg, universālā gravitācijas konstante ir $G = 6.67 \cdot 10^{-11}\,\mathrm{m^3\,kg^{-1}\,s^{-2}}$.

Satelīta ātrums punktā B ir perpendikulārs nogrieznim, kas to savieno ar Marsu. Variējot ātruma absolūto vērtību, ir iespējams panākt dažādu formu satelīta orbītas.

A. Kādu ātrumu jāpiešķir satelītam, lai tā orbīta būtu riņķa līnija? *1 punkts*

Lai satelīta orbīta būtu riņķa līnija, tās liekuma rādiusam punktā B jābūt vienādam ar attālumu līdz Marsam. Liekuma rādiusu ar paātrinājumu saista:

$$\frac{v_\perp^2}{r} = a \tag{27}$$

Paātrinājumu varam izteikt, izmantojot Ņūtona otro likumu un gravitācijas spēka formulu:

$$a = \frac{F}{m} = \frac{G\frac{mM}{r^2}}{m} = G\frac{M}{r^2} \tag{28}$$

$$\frac{v_\perp^2}{r} = G\frac{M}{r^2} \tag{29}$$

No šī vienādojuma varam izteikt v, jo visi pārējie lielumi ir zināmi:

$$v = \sqrt{Gr\frac{M}{r^2}} = \sqrt{\frac{GM}{r}} \tag{30}$$

$$v = \sqrt{\frac{6.67 \cdot 10^{-11} \cdot 6.417 \cdot 10^{23}}{5000000}} = 2926\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{31}$$

B. Kāds ir maksimālais ātrums, ko var piešķirt satelītam, lai tas paliktu orbītā ap Marsu (nevis *izbēgtu* no Marsa gravitācijas lauka)? *1 punkts*

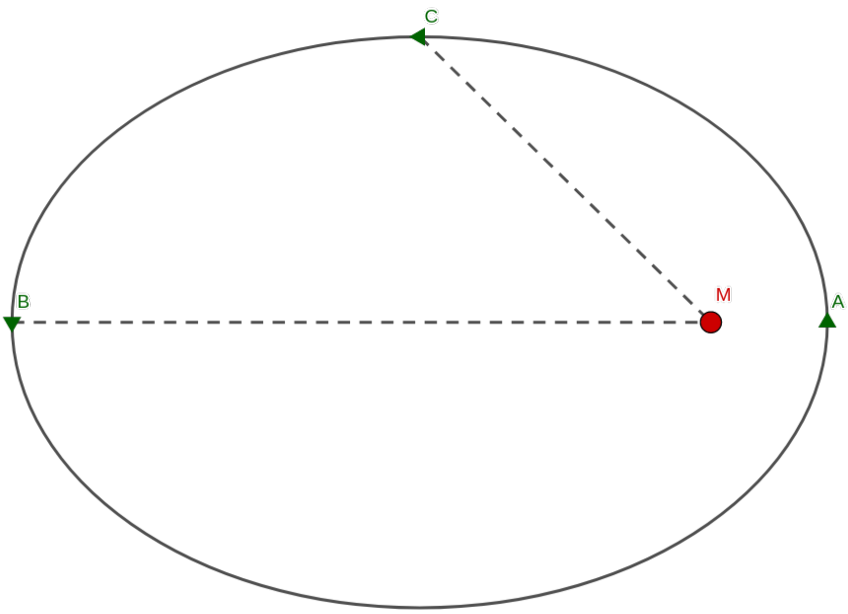
Lai satelīts paliktu orbītā, kinētiskās un potenciālās enerģijas summai jābūt negatīvai.

$$\frac{1}{2}mv^2 - G\frac{mM}{r} < 0 \tag{32}$$

$$v^2 < \frac{2GM}{r} \tag{33}$$

$$v < \sqrt{\frac{2GM}{r}} = 4138\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{34}$$

7. Tagad analizēsim eliptiskas orbītas kvantitatīvā veidā:



Punkti A un B ir attiecīgi satelīta orbītas tuvākais un tālākais punkts no Marsa. Punkts C atrodas vienādā attālumā no punktiem A un B. Satelīta ātrums punktā B ir $1000\,\mathrm{m\,s^{-1}}$, un punkta B attālums no Marsa centra ir 5000 km.

Kāds būs satelīta ātrums punktā A? Un punktā C? *6 punkti*

Kinētiskās un potenciālās enerģijas summa ir nemainīga visas orbītas laikā, tātad tā ir vienāda arī punktos A un B – mēģināsim noteikt, kāda tā ir. Zinām, ka izpildās ne tikai enerģijas, bet arī impulsa momenta saglabāšanās. Šo divu likumu matemātiskā forma ir:

$$\begin{cases} E = \frac{1}{2}mv_A^2 - \frac{GmM}{r_A} \\ E = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GmM}{r_B} \\ r_A v_A = r_B v_B \end{cases} \tag{35}$$

Reizinot pirmo vienādojumu ar r_A^2, otro ar r_B^2, bet trešo kāpinot kvadrātā, iegūsim

$$\begin{cases} Er_A^2 = \frac{1}{2}mv_A^2r_A^2 - GmMr_A \\ Er_B^2 = \frac{1}{2}mv_B^2r_B^2 - GmMr_B \\ r_A^2v_A^2 = r_B^2v_B^2 \end{cases} \tag{36}$$

Ievērosim, ka pirmā un otrā vienādojuma labās puses pirmie locekļi ir vienādi trešā vienādojuma dēļ. Varam šos vienādojumus atņemt un iegūt

$$E(r_A^2 - r_B^2) = GmM(r_B - r_A) \tag{37}$$

Tātad kopējā satelīta enerģija *visos* orbītas punktos ir

$$E = \frac{GmM(r_B - r_A)}{r_A^2 - r_B^2} = \frac{GmM(r_B - r_A)}{(r_A - r_B)(r_A + r_B)} = -\frac{GmM}{r_A + r_B} \tag{38}$$

Tā kā zinām v_B un r_B, varam aprēķināt kopējo enerģiju punktā B un, to pielīdzinot vienādojumam 38, noteikt r_A.

$$-\frac{GmM}{r_A + r_B} = E = \frac{1}{2}mv_B^2 - \frac{GmM}{r_B} \tag{39}$$

$$-\frac{GM}{r_A + r_B} = \frac{1}{2}v_B^2 - \frac{GM}{r_B} = -8.0603 \cdot 10^6\,\mathrm{J\,kg^{-1}} \tag{40}$$

Tātad $r_A + r_B = -\frac{GM}{-8.0603 \cdot 10^6} = 5.310 \cdot 10^6$ un $r_A = 310\,\mathrm{km}$. No šī varam izteikt v_A:

$$r_Av_A = r_Bv_B \tag{41}$$

$$v_A = \frac{r_Bv_B}{r_A} = 16120\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{42}$$

Izmantojot kopējo enerģiju, varēsim noteikt satelīta ātrumu punktā C – jāuzzina tikai attālums līdz Marsam r_C. Tā kā C atrodas tieši starp A un B, tas atrodas uz elipses simetrijas ass – tas ir vienādā attālumā arī no abiem elipses fokusiem. Visiem punktiem uz elipses ir vienāda attālumu līdz abiem fokusiem summa, tātad $2r_C = r_A + r_B$.

$$E = \frac{1}{2}mv_C^2 - \frac{GmM}{r_C} \tag{43}$$

$$v_C = \sqrt{2\frac{E}{m} + \frac{2GM}{r_C}} = \sqrt{2\frac{E}{m} + \frac{4GM}{r_A + r_B}} = \sqrt{2\frac{E}{m} - 4\frac{E}{m}} = \sqrt{-2\frac{E}{m}} \tag{44}$$

$$v_c = 4015\,\mathrm{m\,s^{-1}} \tag{45}$$

8. Raķete, paveikusi savu uzdevumu – nogādāt satelītu Marsa orbītā –, atgriežas uz Zemes. Palīdzi tai nolaisties veiksmīgi!

Raķete, tuvojoties Zemes virsmai, pārvietojas ar ātrumu $v = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ virzienā perpendikulāri Zemes virsmai. Ieslēdzot savus dzinējus, tā spēj paātrināties (vai, precīzāk sakot, palēnināties) ar paātrinājumu $a = 0.5\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. Šajā lielumā jau ir iekļauta Zemes gravitācija, raķešu dzinēju raisītais spēks un gaisa pretestība. Kāds ir mazākais augstums h virs Zemes virsmas, kurā raķetei jāsāk palēnināties, lai tā varētu nolaisties bez sadursmes? *1 punkts*

Ieslēdzot dzinējus pēdējā brīdi, raķetes ātrums, sasniedzot zemi būs 0. Ātruma izmaiņu, attālumu h paātrinoties ar ar paātrinājumu a apraksta vienādojums

$$v_{\text{beigu}}^2 - v_{\text{sākuma}}^2 = 2ah \tag{46}$$

$$h = \frac{v_{\text{beigu}}^2 - v_{\text{sākuma}}^2}{2a} \tag{47}$$

Šajā situācijā

$$h = \frac{0^2 - 20^2}{2 \cdot (-0.5)} = 400\,\text{m} \tag{48}$$

9. Lai raķete savas nolaišanās laikā nesabojātu šim procesam paredzēto platformu, tā tiek dzesēta, izmantojot ūdeni. Raķete nolaišanās laikā izgrūž ūdens tvaikus, kuru temperatūra ir $T = 1500\,°\text{C}$ Katru sekundi tā uz nolaišanās platformas izgrūž 300 kg šādu tvaiku. Ja dzesēšanas sistēma strādā, uz platformas smidzinot ūdeni ar $T_{\text{cold}} =\ °\text{C}$ un vidējā ūdens temperatūra uz platformas nedrīkst pārsniegt $T_{\text{lim}} = 100\,°\text{C}$, tad kāda aukstā ūdens masa m ir jāizsmidzina uz platformas katru sekundi? *1 punkts*

Sajaucoties vielām ar vienādu siltumietilpību (pieņemsim, ka tvaiku un ūdens siltumietilpības sakrīt), gala temperatūra ir šo vielu svērtā vidējā temperatūra pēc masas. Tātad, ja λ_1 ir izgrūsto tvaiku masa uz laika vienību, bet λ_2 – izsmidzinātā ūdens masa uz laika vienību

$$\frac{\lambda_1 T + \lambda_2 T_{\text{cold}}}{\lambda_1 + \lambda_2} \leq T_{\text{lim}} \tag{49}$$

$$\lambda_1 T + \lambda_2 T_{\text{cold}} \leq T_{\text{lim}}(\lambda_1 + \lambda_2) \tag{50}$$

$$\lambda_1 (T - T_{\text{lim}}) \leq \lambda_2 (T_{\text{lim}} - T_{\text{cold}}) \tag{51}$$

$$\lambda_2 \geq \lambda_1 \frac{T - T_{\text{lim}}}{T_{\text{lim}} - T_{\text{cold}}} \tag{52}$$

$$\lambda_2 \geq 300 \cdot \frac{1500 - 100}{100 - 20} = 5250\,\text{kg}\,\text{s}^{-1} \tag{53}$$

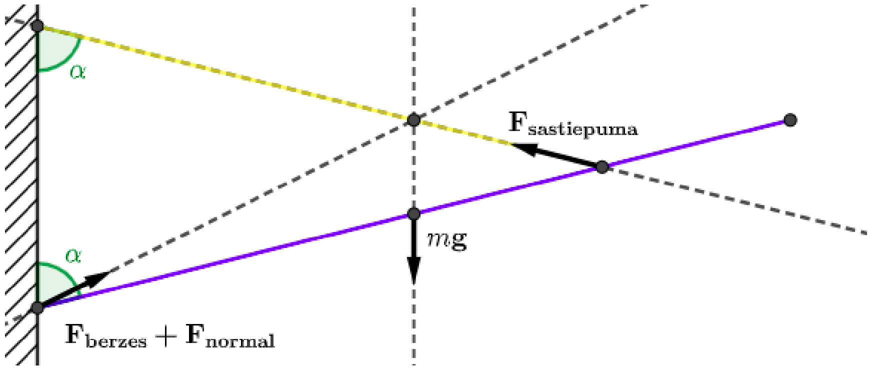
10. Raķete ir veiksmīgi nolaidusies. Par nelaimi tiek atklāts, ka raķetes durvis ir aizslēgtas, un neviens vairs netiek tās iekšienē. Lai šo sāpīgo jautājumu risinātu, palīgā sauc Oskaru – kalnu kāpšanas entuziastu. Viņš kāpj pa raķetes vertikālo sānu uz augšu, līdz nonāk pie raķetes otrām, augšā esošajām durvīm. Oskara situāciju var aprakstīt šādi:

Oskars raķetei ir piestiprināts ar virves palīdzību (tā attēlā redzama brūni oranžā krāsā). Virves viens gals ir stingri piestiprināts pie raķetes, bet otrs – pie Oskara ķermeņa. Attālums Kājas—Saite ir vienāds ar 1.5 m, bet Saite—Galva ar 0.5 m. Oskara masa ir $m = 50\,\text{kg}$. Gravitācijas paātrinājums $g = 10\,\text{m}\,\text{s}^{-2}$.

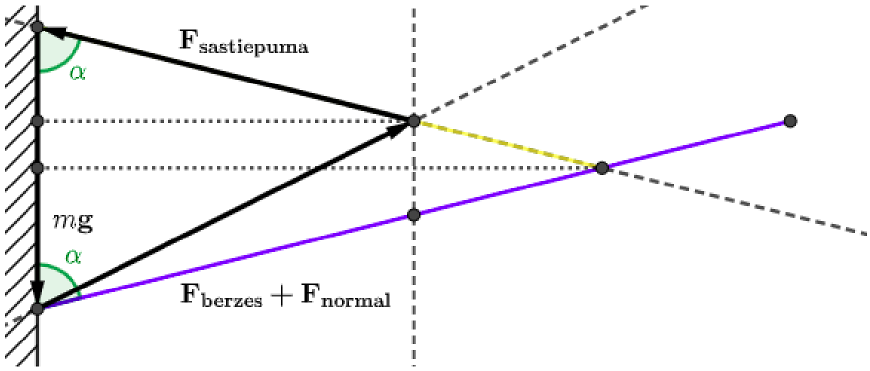
Oskara kājas balstās pret raķetes virsu, bet nav tai piestiprinātas. Berzes koeficients starp viņa zābakiem un raķeti ir $\mu = 0.5$. Oskars, karājoties augstu gaisā, pamana pāris neparastus faktus:

- Viņš ir ne tikai pilnīgi plakans, bet arī pilnībā homogēns – Oskara ķermenis atbilst izslavētajam nogriežņa ideālam.
- Viņa zābaki teju vai slīd pa raķetes virsmu – vari pieņemt, ka to berzes spēks ir maksimāls (attiecīgi, ka $\mathbf{F}_{\text{berzes}} = \mu \mathbf{F}_{\text{normal}}$).
- Virve ar raķetes vertikālo virsmu veido tieši tādu pašu leņķi, kā viņa ķermenis ar raķetes virsmu (attēlā redzamie zaļi iekrāsotie leņķi ir vienādi).

Tavs uzdevums ir noteikt, kāds ir leņķis starp kāpēju un sienu (vai – leņķis starp virvi un sienu; tie ir vienādi). *6 punkti*



Uz kāpēju darbojas 4 spēki: smaguma spēks, virves sastiepuma spēks, berzes spēks ar sienu un normālspēks no sienas. Turpmāk berzes un normālspēku aplūkosim kā vienu spēku $\mathbf{F}_{\text{siena}}$ – to varam darīt, jo abi spēki darbojas vienā punktā. Ja uzvilksim taisnes, pa kurām darbojas smaguma spēks un sastiepuma spēks. Aplūkosim spēka momentu līdzsvaru ap šo taišņu krustpunktu – gan smaguma, gan sastiepuma spēku moments ir $\mathbf{0}$, tātad arī sienas spēka momentam jābūt $\mathbf{0}$, jo to summai jābūt $\mathbf{0}$. Tātad visu spēku taisnes krustojas vienā punktā. Tagad ir skaidri visu trīs spēku virzieni – bet zinām arī, ka šo spēku summa ir $\mathbf{0}$, tātad to vektori veido noslēgtu trīsstūri. Ievērosim, ka zīmējumā ir redzams trīsstūris ar vajadzīgajiem leņķiem – tātad šim trīsstūrim līdzīgs ir arī spēku veidotais.



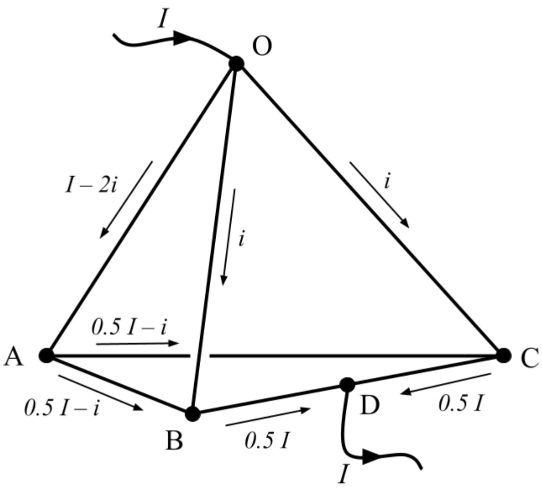
Tā kā berzes spēks ir savā maksimālajā vērtībā, tas ir vienāds ar $\mu\mathbf{F}_{\text{normal}}$. Tātad leņķa starp sienas spēku un sienu tangenss ir $\frac{1}{\mu}$. No ģeometriskiem apsvērumiem tagad varam noteikt leņķa α tangensu. Izmantojot faktu, ka smaguma spēks darbojas ķermeņa viduspunktā, $\tan(\alpha)$ veidojošā pretkatete ir $\frac{3}{2}$ reizes garāka un piekatete ir $\frac{3}{4}$ reizes īsāka par atbilstošajām katetēm leņķim starp sienas spēku un sienu. Tātad

$$\tan(\alpha) = \frac{1}{\mu} \cdot \frac{3}{2} \cdot \frac{4}{3} = 2\frac{1}{\mu} \tag{54}$$

Ievietojot doto berzes koeficienta vērtību, iegūsim, ka $\tan(\alpha) = 4$ un prasītais leņķis $\alpha = 75.96°$

Tetraedrs **7 punkti**

Apskatīsim regulāru tetraedru OABC, kas ir uzbūvēts no sešiem vienādiem rezistoriem – katra tetraedra šķautne ir uzbūvēta no viena rezistora ar pretestību r. Tiek novērots, ka saslēdzot šo tetraedru slēgumā kā parādīts attēlā, starp punktiem O un D plūst strāva I. Punkts D ir šķautnes BC viduspunkts, un zināms, ka rezistoru pretestība ir proporcionāla to garumam.



5. zīm.

A. Aprēķiniet attiecīgos strāvas stiprumus, kas plūst caur posmiem OB, OA, AB un BD. *4 punkti*

Tā kā punkts D ir BC viduspunkts, tad $R_{\mathrm{BD}} = R_{\mathrm{DC}} = \frac{1}{2}r$. Apzīmēsim strāvas stiprumu, kas plūst caur OB ar $i = I_{\mathrm{OB}}$. Pēc simetrijas varam izteikt strāvas stprumu, kas plūst cauri katram posmam, ar I un i kā parādīts 5. zīm. Pielietojot Kirhofa cilpas likumu rezistora posmiem trijstūrī OAB, mēs varam izteikt strāvas i lielumu ar I.

$$ri = r\left(\frac{I}{2} - i\right) + r\,(I - 2i) = r\left(\frac{3}{2}I - 3i\right)$$

$$\therefore\ i = \frac{3}{8}I$$

Attiecīgi strāvas stiprumi, kas plūst caur posmiem OB, OA, AB un BD ir

$$I_{\mathrm{OB}} = i = 0.375I$$
$$I_{\mathrm{OA}} = I - 2i = 0.25I$$
$$I_{\mathrm{AB}} = 0.5I - i = 0.125I$$
$$I_{\mathrm{BD}} = 0.5I$$

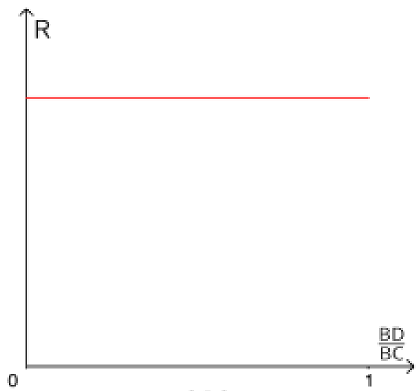
B. Aprēķiniet kopējo pretestību starp punktiem O un D. *1 punkts*

Vadoties pēc iepriekšējās atbildes, varam aprēķināt spriegumu starpību V starp punktiem O un D, pēc kuras varam attiecīgi aprēķināt kopējo pretestību R

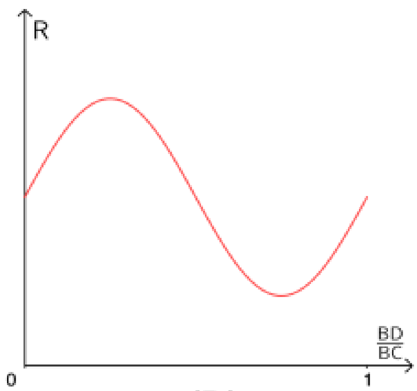
$$V = \frac{1}{2}r \cdot \frac{1}{2}I + ri = \frac{5}{8}rI$$

$$\therefore\ R = \frac{V}{I} = \frac{5}{8}r$$

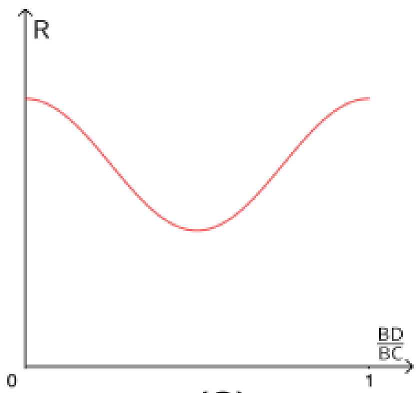
C. Tagad apskatīsim gadījumu, kad punkts D vairs nav fiksēts šķautnes BC vidū, bet var brīvi pārvietoties starp punktiem B un C. Kurš grafiks visprecīzāk apraksta kopējās pretestības R atkarību no punkta D atrašanās vietas? *1 punkts*



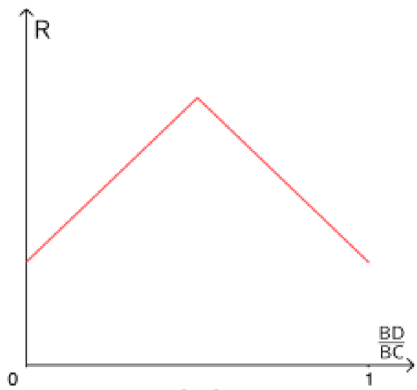
(A)



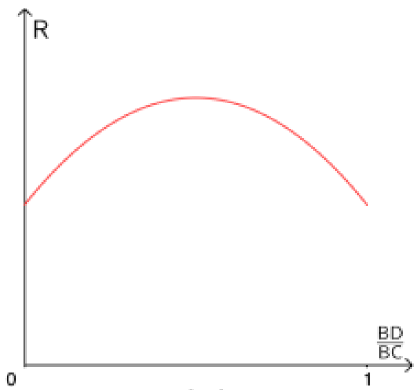
(B)



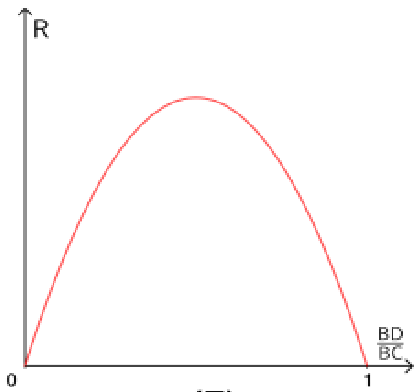
(C)



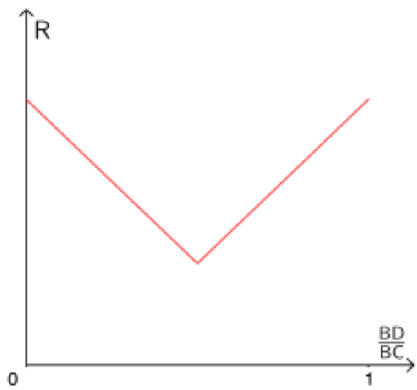
(D)



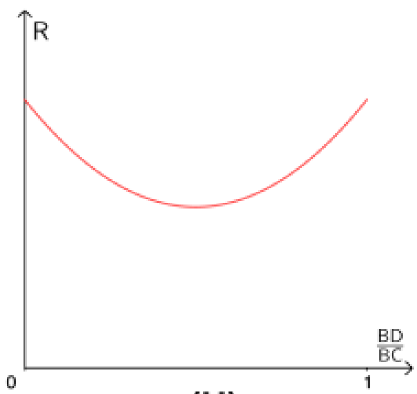
(E)



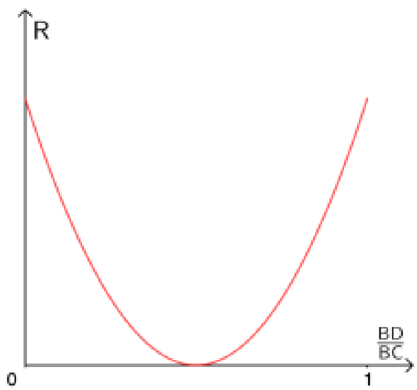
(F)



(G)

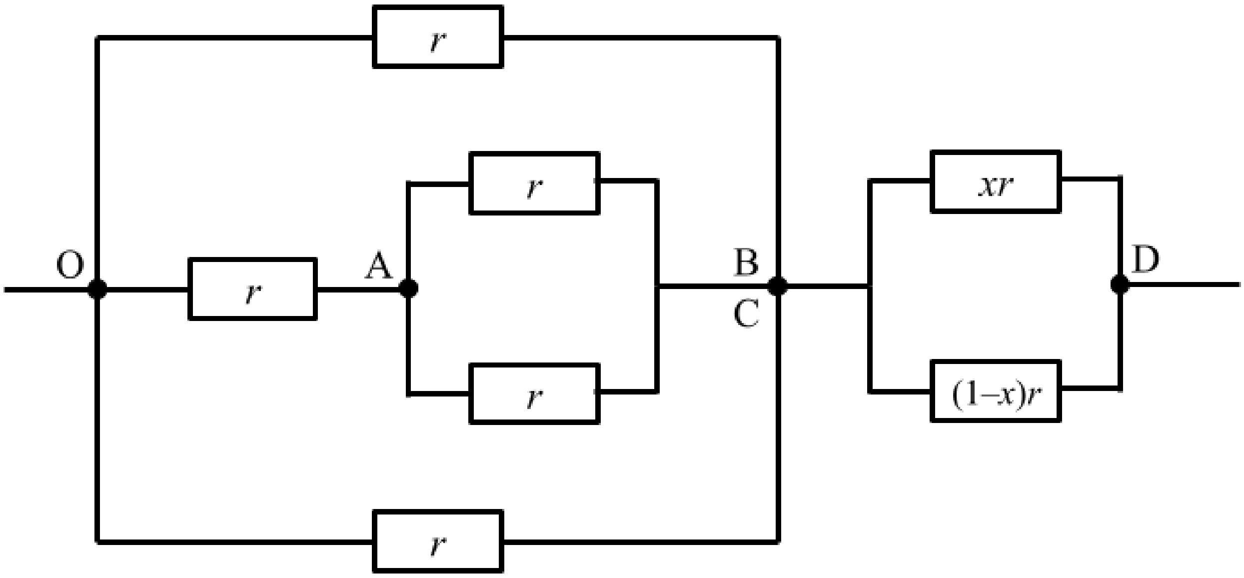


(H)



(I)

Simetrijas dēļ varam pārzīmēt tetraedra shēmu kā parādīts 6. zīm., jo elektriskais potenciāls punktā B ir identisks ar potenciālu punktā C. Ar x apzīmēsim posmu BD un BC garuma attiecību. Tā kā rezistoru pretestība ir proporcionāla to garumam, varam izteikt pretestības R_{BD} un R_{DC} kā $R_{\mathrm{BD}} = xr$ un $R_{\mathrm{DC}} = (1-x)r$.



6. zīm.

Izmantojot likumus paralēliem un sērijveida rezistoru slēgumiem, varam izrēķināt kopējo pretestību R kā

$$R = \frac{1}{\frac{2}{r} + \frac{1}{r+\frac{r}{2}}} + \frac{1}{\frac{1}{xr} + \frac{1}{(1-x)r}} = r\left(-x^2 + x + \frac{3}{8}\right)$$

Secinām, ka šo sakarību vislabāk apraksta grafiks **(E)**.

D. Kura no dotajām mērvienībām atbilst potenciāla starpības jeb sprieguma mērvienībai?

- džouls uz molu
- ampērs uz omu
- kolons uz metru
- ņūtons uz kolonu
- vats uz ampēru

1 punkts

Mērvienību "vats uz ampēru" varam izteikt sekojoši:

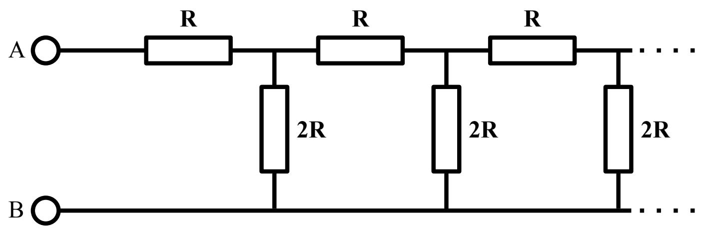
$$\frac{\mathrm{W}}{\mathrm{A}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}} = \frac{\mathrm{J}}{\mathrm{C}} = \mathrm{V}$$

Secinām, ka mērvienība "vats uz ampēru" ir ekvivalenta sprieguma mērvienībai – voltam.

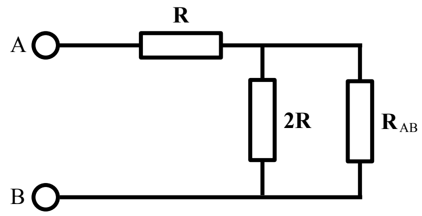
Līdz bezgalībai un tālāk 18 punkti

Zemāk doti bezgalīgu rezistoru ķēžu piemēri. Lai gan, protams, realitātē bezgalīgas ķēdes nav uzbūvējamas, teorētiski šos uzdevumus tāpat var atrisināt! Katrā uzdevumā izteikt gala atbildi ar R.

A. Aprēķini pretestību starp punktiem A un B. *6 punkti*



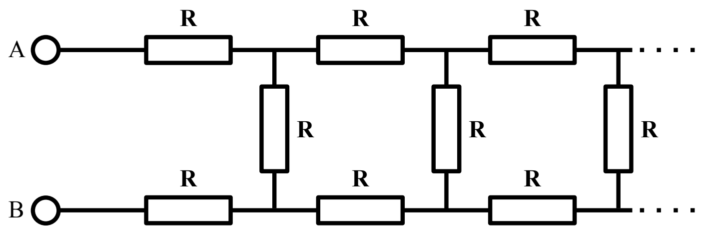
Ievērosim, ka, tā kā ķēde ir bezgalīga, ķēdes labā puse ir identiska ar visu kopējo ķēdi. Tātad, varam aizstāt ķēdes labo pusi ar rezistoru, kura pretestība ir vienāda ar ķēdes kopējo pretestību R_{AB}, kā parādīts 9. zīm. Tālāk, izmantojot likumus paralēliem un sērijveida rezistoru slēgumiem, varam izrēķināt ķēdes kopējo pretestību.



7. zīm.

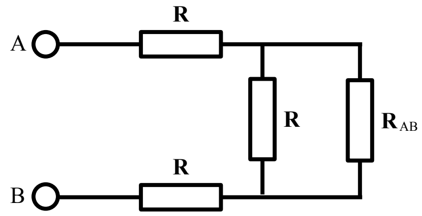
$$R_{\mathrm{AB}} = R + \frac{1}{\frac{1}{2R} + \frac{1}{R_{\mathrm{AB}}}} \therefore R_{\mathrm{AB}} = 2R$$

B. Aprēķini pretestību starp punktiem A un B. *6 punkti*



Šajā uzdevuma daļā varam pielietot līdzīgu stratēģiju kā iepriekš, tādējādi iegūstot sekojošo sakarību:

$$R_{\mathrm{AB}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{R_{\mathrm{AB}}}}$$

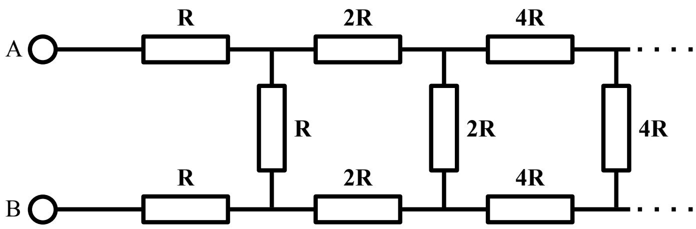


8. zīm.

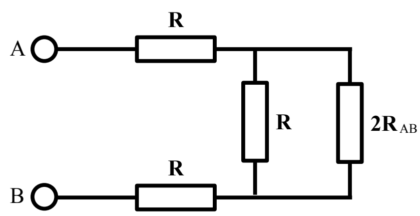
Atrisinot augstāk redzamo vienādojumu, iegūstam divas iespējamas R_{AB} vērtības: $(1-\sqrt{3})R$ un $(1+\sqrt{3})R$. Tā kā $R_{\mathrm{AB}} > 0$, tad vienīgā pieļaujamā R_{AB} vērtība ir:

$$R_{\mathrm{AB}} = (1+\sqrt{3})R$$

C. Aprēķini pretestību starp punktiem A un B. *6 punkti*



Atkal izmantosim līdzīgu stratēģiju kā iepriekš, tomēr šoreiz ievērosim, ka, atkārtojoties shēmas elementam, visas pretestības pieaug divkārši. Tātad, šoreiz aizstāsim visu ķēdes labo pusi ar divkāršotu pretestību R_{AB} kā parādīts 7. zīm. Tālāk, izmantojot likumus paralēliem un sērijveida rezistoru slēgumiem, varam izrēķināt ķēdes kopējo pretestību.



9. zīm.

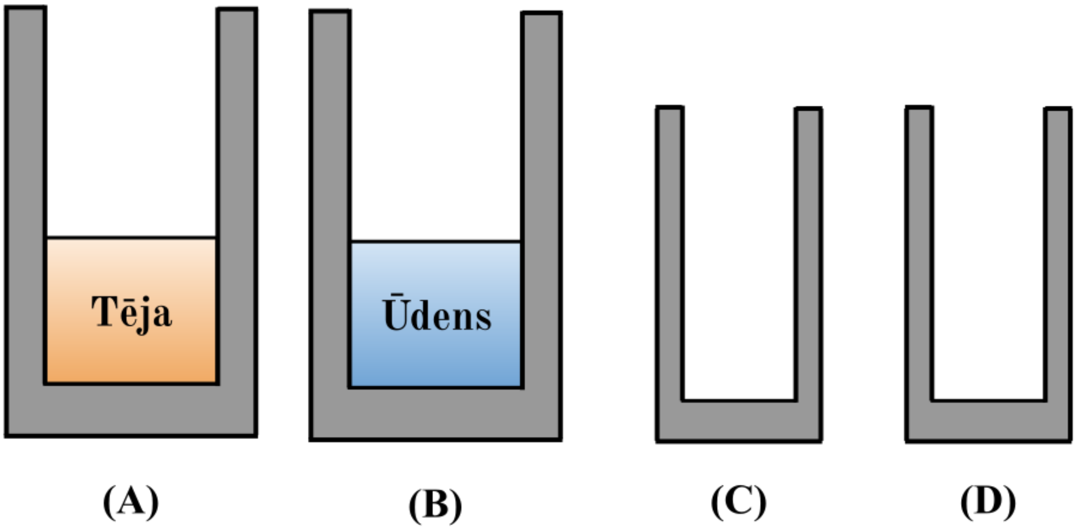
$$R_{\mathrm{AB}} = 2R + \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{2R_{\mathrm{AB}}}}$$

Atrisinot augstāk redzamo vienādojumu, atkal iegūstam citas divas dažādas iespējamas R_{AB} vērtības: $\frac{R}{4}(5-\sqrt{41})$ un $\frac{R}{4}(5+\sqrt{41})$. Tā kā $R_{\mathrm{AB}} > 0$, tad vienīgā pieļaujamā R_{AB} vērtība ir:

$$R_{\mathrm{AB}} = \frac{1}{4}(5+\sqrt{41})R$$

Karsta tēja 12 punkti

Tavā rīcībā ir doti četri trauki. Traukā **A** ir ieliets viens litrs tējas ar temperatūru $T_\mathrm{t} = 80\,°\mathrm{C}$, savukārt traukā **B** atrodas viens litrs ūdens, kura temperatūra ir $T_\mathrm{u} = 20\,°\mathrm{C}$. Trauku **C** un **D** tilpumi ir lielāki par vienu litru, un tos var pa vienam ievietot traukos **A** un **B** tā, ka to saturi nelīst pāri malām.



Piemērs:

1. Ūdens no trauka **B** tiek pārliets traukā **C**, un trauks **C** tiek ievietots traukā **A**.

2. Siltumapmaiņas rezultātā šķidrumu temperatūra abos traukos izlīdzinās – tējas temperatūra traukā **A** kļūst vienāda ar ūdens temperatūru traukā **C**, un siltuma zudumi no trauka **A** ir vienādi ar siltuma guvumiem traukā **C**.

Piezīme: var uzskatīt, ka tējas un ūdens siltumietilpības ir identiskas, savukārt trauku siltumietilpība ir tuvināma nullei. Tāpat var pieņemt, ka nenotiek siltumenerģijas apmaiņa starp vidi un šķidrumiem.

A. Vai, izmantojot tikai šos traukus un siltumapmaiņas procesus starp traukiem, ir iespējams panākt situāciju, kur ūdens temperatūra ir augstāka nekā tējas temperatūra? Ja to var izdarīt, aprakstiet kā. Ja tas nav iespējams, pamatojiet kāpēc. *4.5 punkti*

Šajā punktā prasītais ir iespējams. Pusi no ūdens pārliesim traukā C. Trauku C ievietosim tējā (tas ir, traukā A) – abos traukos temperatūra izlīdzināsies. Tad atlikušo trauka B ūdeni ieliesim traukā D un trauku D ievietosim tējā (kas nu jau ir vēsāka nekā sākumā). Traukā D un B temperatūras izlīdzināsies un sasniegs līdzsvara vērtību, kas ir zemāka nekā traukā C esošā ūdens temperatūra (jo ūdens traukā C temperatūru ieguva līdzīgā procesā, tikai ar karstāku tēju). Salejot traukus D un C atpakaļ traukā, iegūsim ūdeni, kas ir karstāks par tēju, jo trauks D ir tējas temperatūrā, bet C – karstāks.

B. Paskaidro kā tu mēģinātu iegūt pēc iespējas lielāku $T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t}$ vērtību izmantojot dotos traukus. Kāda tavā risinājumā ir šī vērtība? *7 punkti*

Zemāk redzamais *nav* matemātiski valīds pierādījums lielākajai $T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t}$ vērtībai – pilnu pierādījumu atrast nav viegli, un tas nebija vajadzīgs pilnu punktu iegūšanai, kam pietika arī ar tikai šeit redzamo risinājumu. Lai vienkāršotu aprēķinus, izvedīsim vispārīgu vienādojumu, kas parāda temperatūru, kurā nonāk vienādu siltumietilpību šķidrumi ar temperatūrām T_a un T_b un masām m_a un m_b, starp kuriem brīvi notiek siltumapmaiņa.

$$cm_a(T_a - T) = cm_b(T - T_b) \tag{55}$$
$$m_aT_a - m_aT = m_bT - m_bT_b \tag{56}$$
$$m_aT_a + m_bT_b = m_aT + m_bT \tag{57}$$
$$T = \frac{m_aT_a + m_bT_b}{m_a + m_b} \tag{58}$$

Tātad gala temperatūra ir sākotnējo temperatūru svērtais vidējais. Ievērosim arī, ka kopējais siltuma daudzums šķidrumos – masa reiz temperatūra – nav mainījies.

Pareizo risinājumu palīdz iegūt entropijas ideja – lielāka temperatūras starpība starp šķidrumiem atbilst zemākai entropijai (intuitīvi – sistēma ir *sakārtotāka*, tā spēj veikt vairāk derīga darba). Tātad, lai maksimizētu $T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t}$, entropijas pieaugumus jāminimizē. Entropijas izmaiņa tiecas uz 0, procesam kļūstot atgriezeniskam – un divu šķidrumu siltumapmaiņa ir atgriezeniska tikai tad, ja iesaistīts ir bezgalīgi mazs siltuma daudzums. Šāds neprecīzs, bet intuitīvi derīgs arguments noved pie nosacījuma, ka $T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t}$ maksimizējošs process sastāvēs no bezgalīgi mazu šķidrumu daudzumu siltumapmaiņām.

Katram $n \in \mathbb{N}$ definēsim darbību secību:

1. $\frac{1}{n}$ litru ūdens no trauka B pārlejam traukā C.
2. Trauku C ievietojam tējā, notiek siltuma apmaiņa.
3. Trauka C saturu pārlejam traukā D.

Šos soļus atkārtosim n reizes. Aprēķināsim, kāda ir tējas, un kāda ūdens temperatūra pēc šī procesa. Definēsim $\alpha = 20$ ir ūdens temperatūra, bet β_i ir tējas temperatūra pēc i augstāk aprakstītā procesa soļiem. $i + 1$ procesa solī notiek siltumapmaiņa starp litru tējas temperatūrā β_i un $\frac{1}{n}$ litra ūdens temperatūrā α. Tātad abi šķidrumi pēc šī soļa ir temperatūrā

$$\beta_{i+1} = \frac{1 \cdot \beta_i + \frac{1}{n}\alpha}{1 + \frac{1}{n}} = \frac{n\beta_i + \alpha}{n+1} = \beta_i\frac{n}{n+1} + \frac{\alpha}{n+1} \tag{59}$$

Esam izteikuši β_i lineāri rekurentā formā – b_{i+1} ir atkarīgs no lineāras β_i funkcijas. Tātad varam iegūt β_i atkarību no i un β_0.

$$\beta_{i+1} = \beta_i\frac{n}{n+1} + \frac{\alpha}{n+1} \tag{60}$$
$$\beta_{i+1} - \alpha = \beta_i\frac{n}{n+1} + \frac{\alpha}{n+1} - \alpha \tag{61}$$
$$\beta_{i+1} - \alpha = \beta_i\frac{n}{n+1} + \frac{-n\alpha}{n+1} \tag{62}$$
$$\beta_{i+1} - \alpha = \frac{n}{n+1}(\beta_i - \alpha) \tag{63}$$
$$\tag{64}$$

No pēdējās vienādības varam secināt, ka $\beta_i - \alpha = \left(\frac{n}{n+1}\right)^i(\beta_0 - \alpha)$ un $\beta_i = \left(\frac{n}{n+1}\right)^i(\beta_0 - \alpha) + \alpha$.

Tātad gala tējas temperatūra ir $T_\mathrm{t} = \beta_n = \left(\frac{n}{n+1}\right)^n(\beta_0 - \alpha) + \alpha$. Ūdens temperatūru varam noteikt, zinot, ka kopīgais siltuma daudzums nevar mainīties. Tad $T_\mathrm{u} + T_\mathrm{t} = \alpha + \beta_0$ un

$$T_\mathrm{u} = \alpha + \beta_0 - T_\mathrm{t} = \alpha + \beta_0 - \left(\left(\frac{n}{n+1}\right)^n (\beta_0 - \alpha) + \alpha\right) \tag{65}$$

$$T_\mathrm{u} = \beta_0 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (\beta_0 - \alpha) \tag{66}$$

$$T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t} = \beta_0 - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (\beta_0 - \alpha) - \left(\frac{n}{n+1}\right)^n (\beta_0 - \alpha) - \alpha \tag{67}$$

$$T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t} = (\beta_0 - \alpha)\left(1 - 2\left(\frac{n}{n+1}\right)^n\right) \tag{68}$$

Atliek tikai noskaidrot, uz ko tiecas pēdējā izteiksme, kad $n \to \infty$. Vienīgā izteiksmes daļa, kas ir atkarīga no n ir $\left(\frac{n}{n+1}\right)^n$.

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{n}{n+1}\right)^n \tag{69}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^n \tag{70}$$

$$\gamma = \lim_{n\to\infty} \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{n+1} \cdot \left(1 - \frac{1}{n+1}\right)^{-1} \tag{71}$$

$$\gamma = \lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{-n} \cdot 1 \tag{72}$$

$$\gamma = \left(\lim_{n\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^n\right)^{-1} \tag{73}$$

Pēdējās izteiksmes daļu iekavās atpazīstam kā otro ievērojamo robežu – tā tiecas uz e, tātad $\gamma = e^{-1}$. Pie tam, varam arī secināt, ka γ ir mazāks nekā limita izteiksmes vērtība jebkuram galīgam n. Tātad, palielinot n iepriekš aprakstītajā algoritmā, palielināsies beigās iegūta starpība. Tā tiecas uz

$$T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t} = (\beta_0 - \alpha)(1 - 2e^{-1}) \tag{74}$$

Ieliekot skaitliskās vērtības $\beta_0 = 80\,^\circ\mathrm{C}$ un $\alpha = 20\,^\circ\mathrm{C}$, iegūsim, ka maksimālā starpība ir $60 \cdot (1 - \frac{2}{2.712} = 15.85\,^\circ\mathrm{C}$.

C. Kāda ir mazākā $T_\mathrm{u} - T_\mathrm{t}$ vērtība, ko iespējams panākt? *0.5 punkti*

Sistēmas kopējā entropija nevar samazināties – tātad šķidrumi nevar iegūt lielāku temperatūru starpību par sākotnējo. Tātad atbilde ir $-60\,^\circ\mathrm{C}$.

Sprāgstošais katliņš 10 punkti

Aizvākots katliņš no istabas ar temperatūru $T_0 = 25\,°\mathrm{C}$ tiek ievietots cepeškrāsnī, kurā tiek uzturēta nemainīga temperatūra T_c un nemainīgs spiediens $p_a = 101\,\mathrm{kPa}$. Katliņš ir visai smags – tā masa ir $M = 8\,\mathrm{kg}$, bet tā sienu biezums ir $x = 8\,\mathrm{mm}$. Vāciņa malas perfekti sakrīt ar katla iekšējām malām. Vāciņa masa ir $m = 2\,\mathrm{kg}$, un tā diametrs ir $d = 30\,\mathrm{cm}$. Būdams siltumā – cepeškrāsnī, katliņš un tā gaiss iekšienē pamazām uzsilst.

A. Tiek novērots, ka uzsilšanas procesā katliņa vāks ik pa brīdim paceļas. Kādam ir jābūt spiedienam katliņā, lai tā vāciņš tiktu pacelts gaisā? *1 punkts*

Gaisam katliņā uzsilstot, paaugstinās gaisa spiediens iekšā katliņā. Apzīmēsim katliņa vāka laukumu ar $A = \pi\frac{d^2}{4}$. Katla vāciņš pacelsies brīdī, kad iekšējā spiediena p izraisītais spēks, kas darbojas virzienā uz augšu, pārvarēs gravitācijas un atmosfēras spiediena p_a izraisītos spēkus, kas darbojas virzienā uz leju:

$$pA = mg + p_aA$$

$$p = \frac{mg}{A} + p_a = \frac{mg}{\pi\frac{d^2}{4}} + p_a = \frac{2\cdot 9.81}{\pi\frac{0.3^2}{4}} + 101000 = 101.228\,\mathrm{kPa}$$

B. Par cik celsija grādiem ir jāizmainās gaisa temperatūrai katliņā, lai vāciņš viegli paceltos gaisā pirmo reizi? *2 punkti*

Kamēr vāciņš pilnībā stāv uz katla, katla iekšienē norisinās izohorisks process. Procesa sākumā katlā gaisa temperatūra un spiediens ir T_0 un p_a, savukārt tieši pirms vāciņš pirmo reizi paceļas, katlā novērojams spiediens p un temperatūra T_1. Tātad, temperatūras izmaiņu varam aprēķināt sekojoši:

$$\frac{p_a}{T_0} = \frac{p}{T_1} \to T_1 = \frac{p}{p_a}T_0 = \left(\frac{4mg}{\pi p_a d^2} + 1\right)T_0$$

$$\Delta T = T_1 - T_0 = T_0\frac{4mg}{\pi p_a d^2} = (25 + 273.15)\cdot\frac{4\cdot 2\cdot 9.81}{\pi\cdot 101000\cdot 0.3^2} = 0.819\,\mathrm{C}^\circ$$

C. Kopā tiek novērots, ka katliņa vāciņš pacēlās $N = 145$ reizes līdz šādas pacelšanās vairs netika novērotas. Kāda var būt maksimālā cepeškrāsns temperatūra T_c? *6 punkti*

Pēc katras vāciņa pacelšanās reizes, spiediens katliņā izlīdzinās ar apkārtējo spiedienu p_a. Pēc iepriekšējās uzdevuma daļas secinām, ka, katru reizi paceļoties katliņa vāciņam, temperatūra katlā izmainās k reizes, kur

$$k = \frac{4mg}{\pi p_a d^2} + 1$$

Tātad, pēc $N = 145$ pacelšanās reizēm, krāsns temperatūra T_c ir robežās

$$T_0 k^N \leq T_c < T_0 k^{N+1}$$

$$(25 + 273.15) \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot 9.81}{\pi \cdot 101000 \cdot 0.3^2} + 1 \right)^{145} \leq T_c < (25 + 273.15) \cdot \left(\frac{4 \cdot 2 \cdot 9.81}{\pi \cdot 101000 \cdot 0.3^2} + 1 \right)^{146}$$

$$170.7\,°\mathrm{C} \leq T_c < 171.9\,°\mathrm{C}$$

D. Katls un tā vāks ir veidots no čuguna, kura siltumietilpība ir $c = 0.46\,\mathrm{kJ/(kg\,K)}$. Krāsns tiek uzsildīta līdz $T_c = 200\,°\mathrm{C}$ (šī vērtība var atšķirties no iepriekšējā uzdevuma daļā aprēķinātās T_c). Cik daudz enerģijas Q tika pievadīts katlam un tā vākam, lai uzsildītu to no T_0 līdz T_c? *0.5 punkti*

$$Q = cm\Delta T = 0.46 \cdot (2 + 8) \cdot (200 - 25) = 805\,\mathrm{kJ}$$

E. Katls tika novietots uz virtuves letes virsmas. Kāds, garām ejot, katlu netīšām viegli pagrūda horizontālā virzienā, un katls sāka krist zemē. Sadursmes momentā ar zemi, katla ātrums vertikālā virzienā bija $v = 5\,\mathrm{m\,s^{-1}}$. Cik augsta ir virtuves lete? Gravitācijas paātrinājums $g = 9.81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$. *0.5 punkti*

$$\Delta(v_y^2) = 2g\Delta y \;\rightarrow\; \Delta y = \frac{\Delta(v_y^2)}{2g} = \frac{5^2 - 0^2}{2 \cdot 9.81} = 1.27\,\mathrm{m}$$

Ūdensroze **15 punkti**

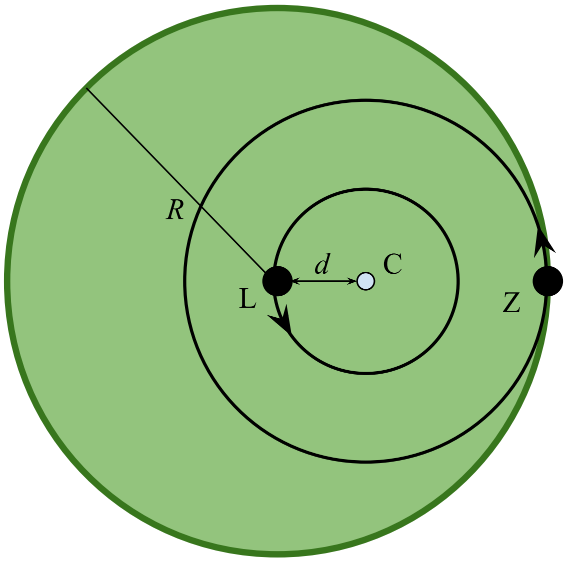
Zīdainis, kura masa ir m, atrodas uz ūdensrozes lapas, kas ir riņķa līnijas formā. Lapa, kuras masa ir M, var brīvi kustēties un griezties uz ūdens virsmas bez berzes un tā neiekustina ūdeni zem sevis. Zīdainis atzīmē savu atrašanās vietu un sāk rāpot pa lapas pašu malu. Viņš turpina rāpot pa lapas malu līdz nonāk pie sākotnējās atzīmes. Lapas atskaites sistēmā zīdainis ir veicis tieši vienu apriņķojumu pa lapas malu.

10 punkti

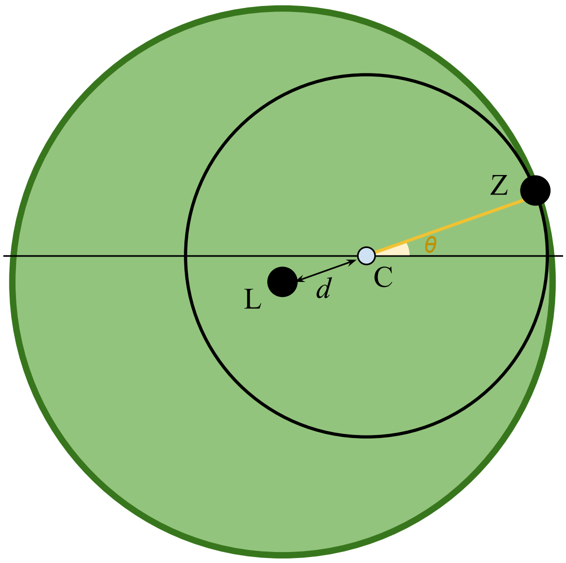
Apzīmēsim lapas rādiusu ar R. Ūdensrozes un zīdaiņa sistēmas kopējais masas centrs nevar kustēties. 10. zīm. ar Z apzīmēta zīdaiņa pozīcija, ar L apzīmēts ūdensrozes lapas centrs, bet C apzīmē kopējo masas centru. Distance d starp lapas centru L un masas centru C ir

$$d = R\frac{m}{M+m}$$

Līdz ar zīdaiņa kustību pa lapas malu (pieņemsim, pretpulksteņrādītājvirzienā) ūdensrozes lapas centrs kustās pretējā virzienā ap masas centru, lai masas centrs vienmēr paliktu uz vietas. Tā kā distances d lielums nemainās, ūdensrozes lapas centrs L kustās pa riņķa līniju ar rādiusu d apkārt masas centram C. Līdzīgi, zīdainis kustās apkārt masas centram pa riņķa līniju ar rādiusu $R-d$.



10. zīm.



11. zīm.

Zīdainim kopā ar ūdensrozes lapu ir tikai viena brīvības pakāpe – ja zīdainis pa savu trajektoriju ir pārvietojies par θ grādiem pret horizontāli (skat. 11. zīm.), tad lapa arī ir veikusi tādu pašu leņķisko ceļu. Tomēr lapai ir vēl viena brīvības pakāpe – tās rotācija relatīvi pret ūdeni. Apzīmēsim lapas rotāciju relatīvi pret ūdeni ar ϕ.

Kopējais zīdaiņa un ūdensrozes lapas leņķiskais moments ir nulle. Apzīmēsim rotācijas ātrumu ap masas centru ar $\omega_\theta = \frac{\theta}{t}$ un lapas rotācijas ātrumu relatīvi pret ūdeni ar $\omega_\phi = \frac{\phi}{t}$. Lai leņķiskais moments saglabātos kā nulle, ir jāizpildās:

$$Md^2\omega_\theta + m(R-d)^2\omega_\theta + \frac{1}{2}MR^2\omega_\phi = 0$$

Ievietojot $d = R\frac{m}{M+m}$ un vienkāršojot izteiksmi, iegūstam:

$$\frac{m}{M+m}\omega_\theta + \frac{1}{2}\omega_\phi = 0$$

Pieņemot, ka rotācijas ir konstantas (vai arī integrējot) un definējot leņķus sākuma momentā kā $\theta(0) =$

$\phi(0) = 0°$, iegūstam sakarību starp θ un ϕ.

$$\frac{m}{M+m}\theta + \frac{1}{2}\phi = 0 \rightarrow \phi = \frac{-2m}{M+m}\theta$$

Lai noteiktu par kādu leņķi θ zīdainis rāpojot būs pagriezies ap masas centru, apskatīsim zīdaiņa ātrumu relatīvi pret ūdeni. Tā kā masas centrs paliek uz vietas, zīdaiņa ātrums ir izsakāms kā $(R-d)\omega_\theta$, jo zīdainis kustās ap masas centru pa riņķa līniju ar rādiusu $R-d$. Tomēr zīdaiņa ātrumu varam izteikt arī apskatot zīdaiņa ātrumu relatīvi pret ūdensrozes lapu un pie tā pieskaitot ūdensrozes lapas ātrumu relatīvi pret ūdeni[1]. Ar α apzīmēsim leņķi, ko zīdainis ir aprāpojis ap ūdensrozes lapu lapas atskaites sistēmā, bet ar ω_α šī leņķa leņķisko ātrumu. Iegūstam sakarību

$$(R-d)\omega_\theta = R\omega_\alpha + (R\omega_\phi - d\omega_\theta) \rightarrow \theta = \alpha + \phi$$

Mūs interesē par kādu leņķi ϕ būs pagriezusies ūdensrozes lapa, kad zīdainis būs apgājis pilnu riņķi ap lapu. Ievietojot $\alpha = 360°$ un vienkāršojot izteiksmi augstāk, iegūstam atbildi:

$$\phi = \frac{-2m}{M+3m} \cdot 360°$$

A. Par kādu leņķi ϕ_1 būs pagriezusies ūdensrozes lapa, ja tās masa ievērojami pārsniedz zīdaiņa masu ($M \gg m$)? *0.5 punkti*

$$\phi_1 = \lim_{m\to 0}\left(\frac{-2m}{M+3m} \cdot 360°\right) = 0°$$

B. Par kādu leņķi ϕ_2 būs pagriezusies ūdensrozes lapa, ja tās masa ir ievērojami mazāka nekā zīdaiņa masa ($M \ll m$)? *2 punkti*

$$\phi_2 = \lim_{M\to 0}\left(\frac{-2m}{M+3m} \cdot 360°\right) = -240°$$

C. Par kādu leņķi ϕ_3 būs pagriezusies ūdensrozes lapa, ja zināms, ka $M = 7$ kg, bet $m = 3$ kg? *2.5 punkti*

$$\phi_3 = \frac{-2 \cdot 3}{7 + 3 \cdot 3} \cdot 360° = -135°$$

[1] Visa kustība notiek tangenciāli zīdaiņa trajektorijai

Melnā kaste **12 punkti**

Apskatīsim kubisku tvertni ar masu $m = 1\,\mathrm{kg}$ un malas garumu $a = 1\,\mathrm{m}$, kas atrodas bezsvara stāvoklī (kosmosā). Šī tvertne ir pildīta ar ūdens tvaiku, kura temperatūru $T = 100\,°\mathrm{C}$ var uzskatīt par nemainīgu. Piecu tvertnes skaldņu temperatūra ir vienāda ar ūdens tvaika temperatūru T, savukārt sestās skaldnes temperatūra ir $T_0 = 0\,°\mathrm{C}$. Visas ūdens tvaika molekulas, kas atsitas pret sesto skaldni, kondensējas un uzreiz piesalst pie tās. Zināms, ka sākotnējais spiediens tvertnē ir $P_0 = 1\,\mathrm{kPa}$.

A. Pieņemsim, ka sākotnēji tvertne ir pagriezta tā, ka skaldne ar temperatūru T_0 ir pavērsta pozitīvās x ass virzienā. Kādā virzienā tvertne paātrināsies sākuma brīdī? *1 punkts*

- paātrināsies pozitīvā x ass virzienā
- paātrināsies negatīvā x ass virzienā
- paātrināsies kādā citā virzienā
- nepaātrināsies

Sadursmes ar 5 *parastajām* skaldnēm ir pilnīgi elastīgas, tātad katras sadursmes laikā molekula tām nodod impulsu $2p_\perp$, kur $p_\perp$ ir molekulas impulsa projekcija perpendikulāri attiecīgajai skaldnei. Sadursmes ar sesto skaldni ir pilnīgi neelastīgas, tātad to laikā molekula sienai nodod impulsu $p_\perp$. Tātad uz sesto sienu darbojas mazāks spēks – kaste sāk pārvietoties pretēji x ass virzienam.

B. Aprēķini kastes sākotnējo paātrinājumu a. *4 punkti*

Rezultējošais spēks uz kasti var darboties tikai paralēli x asij. Iepriekšējā punktā noskaidrojām, ka katra molekula nodod sestajai sienai divreiz mazāku impulsu, tātad spiediens uz sesto skaldni ir divreiz mazāks. Spēku starpība starp sesto un tai pretējo skaldi tad ir $F = \frac{1}{2}PS = \frac{1}{2}\cdot 1000\cdot 1^2 = 500\,\mathrm{N}$. Zinot kastes masu, varam aprēķināt tās paātrinājumu $a = \frac{F}{m} = \frac{500}{1} = 500\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

C. Aprēķini ūdens tvaika molekulu daudzumu N, kas mazā laika periodā Δt piesalst pie sestās malas sākuma brīdī. *3 punkti*

Matemātiski precīzi pamatotu atbildi uz šo jautājumu var iegūt, izmantojot pilno Maksvela distribūcijas formu, taču atbildi var iegūt arī intuitīvākā veidā. Kuras molekulas var sadurties ar sesto skaldni īsā laika periodā Δt? Tās, kuras virzās pareizajā virzienā un kuru attālums no šīs malas x ir mazāks par to ātruma projekcijas $v_x = v\cos(\theta)$ reizinājumu ar Δt, kur θ ir leņķis starp ātrumu un x asi. Aprēķinot vidējo $\langle v_x\rangle$, mēs varam teikt, ka molekulu skaits, kurām $x < v_x$ ir vienāds ar molekulu skaitu, kuras ietilpst kuba daļā pie sestās skaldnes ar biezumu $\langle v_x\rangle\Delta t$. Molekulu vidējo ātrumu x ass virzienā varam noteikt šādi: tā kā v un $\cos(\theta)$ ir neatkarīgi lielumi, to reizinājuma vidējais ir to vidējo reizinājums. Tātad $\langle v_x\rangle = \langle v\rangle\langle\cos(\theta)\rangle$. No gāzu kinētiskās teorijas pamatiem zinām, ka $\langle v\rangle = \sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$, kur k_B ir Bolcmaņa konstante un m ir vienas molekulas masa. Lai noteiktu vidējo $\langle\cos(\theta)\rangle$ aplūkosim visas molekulas, kuras kustās ar ātrumu v. Tad to ātruma vektori atrodas uz pussfēras (aplūkojam tikai molekulas, kuras virzās uz pareizo pusi). Mums jānosaka vidējais pussfēras punkta attālums to sfēru uz pusēm šķeļošās plaknes. Atceroties sfēras īpašību – laukuma, kuru izšķeļ divas paralēlas plaknes, lielumu nosaka tikai attālums starp šīm plaknēm – varam uzreiz pateikt, ka $\langle\cos(\theta)\rangle = \frac{1}{2}$. Tātad $\langle v_x\rangle = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}$. Vajadzīgais molekulu skaits ir vienāds ar molekulu skaitu, kas atrodas tilpumā $\frac{1}{2}\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}\Delta t$ un kuras virzās uz pareizo pusi – tātad puse no visām molekulām, kas šajā tilpumā atrodas.

$$N = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8k_BT}{\pi m}}\Delta t\cdot\frac{N_{\text{total}}}{V_{\text{total}}} \tag{75}$$

N_{total} varam aprēķinot, izmantojot ideālas gāzes vienādojumu.

$$PV_{\text{total}} = N_{\text{total}} k_B T \tag{76}$$
$$\frac{N_{\text{total}}}{V_{\text{total}}} = \frac{P}{k_B T} \tag{77}$$

$$N = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8k_B T}{\pi m}} \cdot \frac{P}{k_B T}\Delta t \tag{78}$$
$$N = \frac{1}{4}\sqrt{\frac{8 \cdot 1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}{3.14 \cdot 2.988 \cdot 10^{-26}}} \cdot \frac{1000}{1.38 \cdot 10^{-23} \cdot 373}\Delta t = 3.218 \cdot 10^{25} \Delta t \tag{79}$$

D. Sākotnējā kastes pozīcija un tās ātrums kādā inerciālā atskaites sistēmā ir $x_0 = 0\,\text{m}$ un $v_0 = 0\,\text{m}\,\text{s}^{-1}$. Kāds būs kastes pārvietojums x_∞, ātrums v_∞ un paātrinājums a_∞ salīdzinājumā ar sākotnējo pozīciju pēc ļoti ilga laika? *4 punkti*

Šo uzdevumu risināt, izmantojot paātrinājuma atkarību no laika, ir ļoti sarežģīti, bet to var ievērojami vienkāršot, izmantojot saglabāšanās likumus. Kaste ar gāzi tajā ir noslēgta sistēma, tātad tās masas centrs nevar pārvietoties (sistēmas masas centra paātrinājums ir tikai ārēju spēku, šoreiz 0, radīts). Masas centrs sākotnēji ir tieši kastes vidū – gāze ir vienmērīgi sadalīta pa kastes tilpumu. Pēc ilga laika visas ūdens molekulas ir *piesalušas* pie sestās skaldnes. Notieksim, kādā attālumā no sestās skaldnes tagad ir masas centrs. Kastes masa ir 1 kg, bet gāzes masu varam noteikt no ideālas gāzes vienādojuma.

$$PV = nRT \tag{80}$$
$$m = nM = \frac{PVM}{RT} \tag{81}$$
$$m = \frac{1000 \cdot 1 \cdot 0.018}{8.314 \cdot 373} = 5.8 \cdot 10^{-3}\,\text{kg} \tag{82}$$

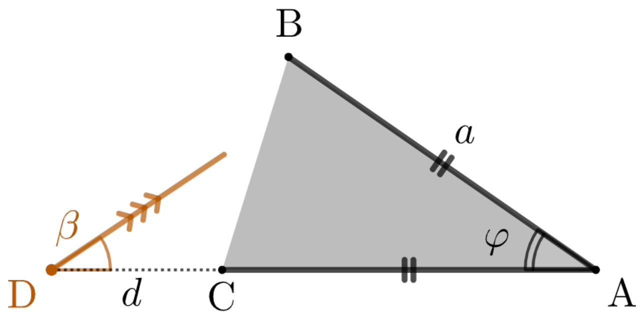
$$x_{\text{cm}} = \frac{x_{\text{gāze}} m_{\text{gāze}} + x_{\text{kaste}} m_{\text{kaste}}}{m_{\text{gāze}} + m_{\text{kaste}}} \tag{83}$$
$$x_{\text{cm}} = \frac{0 \cdot 0.0058 + 0.5 \cdot 1}{0.0058 + 1} = 0.497\,\text{m} \tag{84}$$

Ja masas centrs sākotnēji bija 0.5 m attālumā no sestās skaldnes, bet tagad ir 0.497 m attālumā, tad kaste ir pavirzījusies negatīvā x virzienā par 0.00289 m jeb aptuveni par 3 milimetriem. Šis rezultāts varētu šķist pārsteidzošs – kaste sākumā paātrinājās ar $a = 500\,\text{m}\,\text{s}^{-2}0$! Taču ļoti drīz paātrinājums sākas citā virzienā – tā kā visas molekulas ar pozitīvu v_x piesalst pie sestās skaldnes, neviena no tām neatsitas un vairs nekad nesaskarsies ar sestajai skaldnei pretējo. Tātad spiediens uz sestajai skaldnei pretējo pēc īsa brīža būs gandrīz 0.

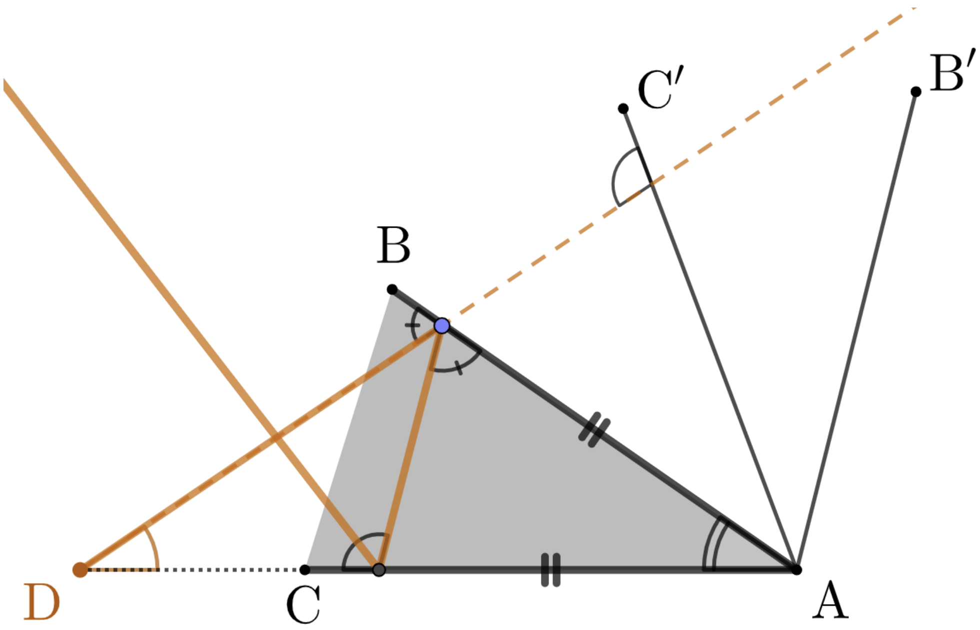
Kad visas molekulas būs piesalušas, kaste vairs nevar pārvietoties, jo tās un gāzes masas centram jāpaliek uz vietas. Tādu pašu argumentu attiecinot uz paātrinājmu, varam iegūt ka v_∞ un a_∞ abi ir 0.

Atstarotīgā prizma **8 punkti**

Dota vienādsānu prizma ABC, kuras sānu malu garumi ir BA = CA = a, bet leņķis starp sānu malām ir φ. Prizmas sānu malas ir atstarojošas, bet pati prizma ir pildīta ar materiālu, kura gaismas laužšanas koeficients ir n. No punkta D, kas atrodas uz vienas taisnes ar punktiem A un C tiek spīdināts lāzera stars. Lāzera stara leņķis pret taisni AD ir β. Punkts D atrodas attālumā d no prizmas.



Uzdevumos ar spoguli ir vērtīgi apskatīt virtuālu telpu, kas veidojas aiz spoguļa sienām. Divu spoguļu dēļ, efektīvi veidojas vairākas virtuālās telpas viena aiz otras kā parādīts 12. zīm. (šajā piemērā prizmas materiāla gaismas laušanas koeficients ir $n = 1$).



12. zīm.

12. zīm. ir parādīta stara gaita pa prizmu un ekvivalenta gaita caur virtuālajām telpām. Šajā uzdevumā virtuālo telpu pielietojums ir vērtīgs, jo stars, kas iet taisni cauri virtuālajām telpām, perfekti apraksta stara gaitu prizmā. Pielietojot šo principu, varam veikli atrisināt nākamos jautājumus.

A. Kāds ir maksimālais un minimālais skaits reižu cik lāzera stars var atstaroties pret prizmas sienām, ja $\varphi = 10°$? *2.5 punkti*

Ja lāzera stars tiek spīdināts virzienā prom no prizmas, tad tas ne reizi pret prizmas malām neatstarosies, tātad, minimālais atstarošanās reižu skaits $N_{\text{min.}} = 0$.

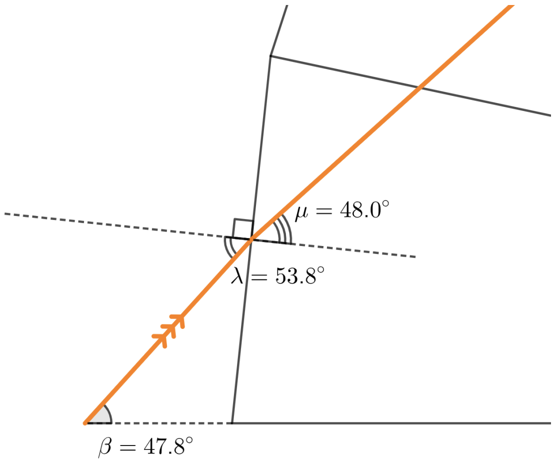
Pielietojot augstāk aprakstīto principu varam arī veikli izrēķināt maksimālo atstarošanās skaitu reižu. Piemeklējot konkrētas n un β vērtības varam panākt, ka stars atstarosies

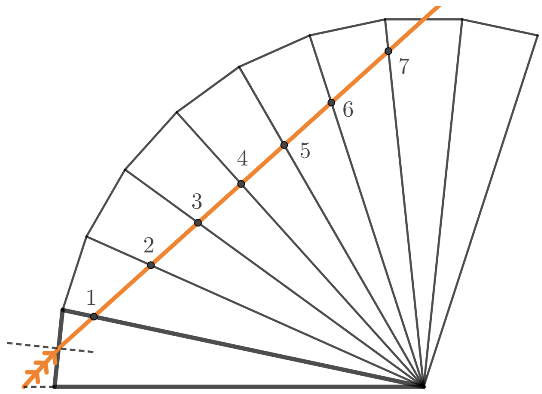
$$N_{\text{max.}} = \frac{180°}{10°} = 18\,\text{reizes}$$

Vairāk atstarošanās reižu nav iespējams panākt, jo taisns stars nevar šķērsot riņķa līnijas loku, kura garums pārsniedz 180°.

B. Apskatīsim konkrētu situāciju, kur $a = 6\,\text{m}$, $d = 50\,\text{cm}$, $n = 1.0859$, $\beta = 47.8°$ un $\varphi = 12.0°$. Aprēķini cik reizes lāzera stars atstarosies pret prizmas sāniem pie šādiem parametriem. *5.5 punkti*

Pie konkrētām vērtībām uzdevums ieņem ģeometrijas uzdevuma formu. 13. zīm. ir parādīts rezultāts pie dotajām vērtībām. Iegūstam $N = 7$.





13. zīm.

Etanola Rasēns 8 punkti

1. Mums apkārt esošo atmosfēru sastāda ne tikai slāpeklis, skābeklis, argons un ogļskābā gāze – tajā atrodams arī liels daudzums gāzveida ūdens. Kāpēc tas nepārvēršas šķidrā ūdenī? Uz šo jautājumu var atbildēt, izmantojot zināšanas par piesātināta tvaika spiedienu.

Aplūkojot noslēgtu trauku ar noteiktu ūdens daudzumu tajā, stāvokļu maiņa notiek divos procesos: iztvaikošanā un kondensācijā. Šie abi procesi notiek reizē, bet kopējās izmaiņas nosaka tas, kurš no procesiem notiek straujāk. Ja trauka temperatūra ir konstanta, tad iztvaikošana dominēs tik ilgi, kamēr tvaika spiediens būs vienāds ar tai temperatūrai raksturīgo piesātinātā tvaika spiedienu.

Reālā tvaika spiediena dalījumu ar tai temperatūrai atbilstošo piesātinātā tvaika spiedienu sauc par relatīvo gaisa mitrumu – to parasti izsaka procentos.

Piesātinātā tvaika spiediena atkarību no temperatūras var aprakstīt ar Antuāna vienādojumu (Antoine equation):

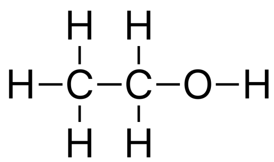
$$log_{10}(P_p) = a - \frac{b}{c+T}$$

a, b un c ir katrai vielai specifiski koeficienti. Tevi iespējams mulsina mērvienību sajukums šajā vienādojumā – logaritms no spiediena nav gluži ierasta parādība. Šī neparastā situācija ir radusies, jo Antuāna vienādojums ir empīriski iegūts, nevis izvests no kāda fizikas modeļa. Lieto SI mērvienības, un tavi aprēķini izdosies!

Šajā uzdevumā tu pētīsi nevis ūdens, bet citas vielas – etanola – tvaikus. Etanola tvaikus vari uzskatīt par ideālu gāzi.

Etanolam raksturīgie Antuāna vienādojuma koeficienti (pie tiem nav norādītas mērvienības; aprēķinos lieto SI sistēmas mērvienības, tas ir, Pa Pa un K) ir:

$$a = 10.3$$
$$b = 1642.9$$
$$c = -42.85$$



Iedomājies kannu, kuras tilpums ir 25 litri. Sākotnēji kannas satura temperatūra ir 70 °C. Tajā atrodas etanola tvaiki – relatīvais etanola mitrums kannā ir 65 % .

A. Kāds ir etanola tvaiku spiediens P_{ethanol} kannā? *0.5 punkti*

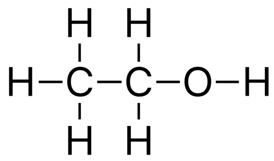
$$P_{\text{ethanol}} = \varphi P_{\text{p}} = \varphi \cdot 10^{a-\frac{b}{c+T}} = 0.65 \cdot 10^{10.3-\frac{1642.9}{70+273.15-42.85}} = 43.9\,\text{kPa}$$

B. Kāds ir etanola daudzums n kannā? *0.5 punkti*

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{43900 \cdot 0.025}{8.314 \cdot (70+273.15)} = 0.385\,\text{mol}$$

C. Kāda ir etanola molmasa M ? *0.5 punkti*

$$M = 2M_{\mathrm{C}}+6M_{\mathrm{H}}+M_{\mathrm{O}} = 46\,\mathrm{g\,mol^{-1}} = 0.046\,\mathrm{kg\,mol^{-1}}$$



D. Kāda ir etanola masa m kannā? *0.5 punkti*

$$m = n \cdot M = 0.385 \cdot 0.046 = 0.0177\,\mathrm{kg}$$

E. Kannu neatverot, tās temperatūru samazina par 15 °C. Kāds tagad ir piesātinātā tvaika spiediens kannā? *1 punkts*

$$P'_{\mathrm{p}} = 10^{a-\frac{b}{c+T}} = 10^{10.3-\frac{1642.9}{70-15+273.15-42.85}} = 34.8\,\mathrm{kPa}$$

F. Par cik procentiem ir palielinājies relatīvai mitrums kannā pēc temperatūras pazemināšanas? *1 punkts*

$$P'_{\mathrm{ethanol}} = \frac{nRT}{V} = \frac{0.385 \cdot 8.314 \cdot (70-15+273.15)}{0.025} = 42.0\mathrm{kPa}$$

$$\varphi' = \frac{P'_{\mathrm{ethanol}}}{P'_{\mathrm{p}}} = \frac{42.0}{34.8} > 100\,\%$$

Tā kā etanola mitrums nevar pārsniegt 100 %, bet $\varphi' > 100\,\%$, secinām, ka, pazeminot temperatūru, esam sasnieguši rasas punktu. Tātad, etanola mitrums kannā ir $\varphi' = 100\,\%$ un attiecīgi mitruma izmaiņa ir:

$$\Delta\varphi = 1 - 0.65 = 35\,\%$$

G. Apskatot to pašu etanola kanniņu, atbildi uz šiem jautājumiem:

G1. Līdz kādai temperatūrai ir jāatdzesē kanna, lai tajā parādītos šķidrs etanols? Šo punktu sauc par etanola rasas punktu T_r. *2 punkti*

Brīdis, kurā etanols sāks kondensēties, būs novērojams brīdī, kad $P_{\mathrm{p}} = P_{\mathrm{ethanol}}$. Iegūstam sekojošu vienādību:

$$P_{\mathrm{p}} = P_{\mathrm{ethanol}} \rightarrow a - \frac{b}{c+T_r} = \log_{10}\frac{nRT_r}{V}$$

Atrisinot vienādojumu pēc T_r, iegūstam $T_r = 331.6\,\mathrm{K}$.

G2. Ja temperatūru pazeminātu līdz temperatūrai, kas ir par 10 °C grādiem zemāka kā T_r, kāda masa etanola kondensētos? *2 punkti*

$$P_\mathrm{p} = 10^{a-\frac{b}{c+T}} = 10^{10.3-\frac{1642.9}{331.6-10-42.85}} = 25.5\,\mathrm{kPa}$$

$$P_\mathrm{ethanol} = \frac{nRT}{V} = \frac{0.385 \cdot 8.314 \cdot (331.6-10)}{0.025} = 41.2\,\mathrm{kPa}$$

Tvaika spiediens nevar būt lielāks par piesātināta tvaika spiedienu. Tāpēc 25.5 kPa paliks kā tvaiks un pārējais kondensēsies.

$$P_\mathrm{kondens.} = P_\mathrm{ethanol} - P_\mathrm{p} = 41.2 - 25.5 = 15.7\,\mathrm{kPa}$$

$$m = n \cdot M = M \cdot \frac{VP_\mathrm{kondens.}}{RT} = 0.046 \cdot \frac{0.025 \cdot 15700}{8.314 \cdot (331.6-10)} = 6.75\,\mathrm{g}$$